

Raport techniczny

Spis treści

I	Opracowanie modelu quasi-geoidy dopasowanej (ζ_{GGI}).....	1
I.1	Ocena jakości danych GNSS/niwelacyjnych.	1
I.2	Wybór funkcji transformującej model quasi-geoidy grawimetrycznej do danych GNSS/niwelacyjnych i opracowanie modelu quasi-geoidy dopasowanej.....	7
I.3	Uzasadnienie wybranej metody opracowania quasi-geoidy.....	9
I.4	Opis metody GGI	10
I.5	Opracowanie modelu quasi-geoidy dopasowanej $\zeta_{GNSS/lev}^B$ zgodnie z opisaną procedurą	13
I.6	Opracowanie końcowego modelu quasi-geoidy dopasowanej (ζ_{GGI}).....	14
II	Analiza dokładności opracowanego modelu.	16
II.1	Porównanie modelu z danymi GNSS/niwelacyjnymi.	16
II.2	Porównanie modelu GGI z modelem PL-geoid11-EVRF2007.....	16
III	Uwagi końcowe.....	17

I Opracowanie modelu quasi-geoidy dopasowanej (ζ_{GGI})

I.1 Ocena jakości danych GNSS/niwelacyjnych.

Na podstawie dostarczonych przez Główny Urząd Geodezji i Kartografii wykazów współrzędnych punktów podstawowych osnów geodezyjnych (poziomej i wysokościowej) wybrano punkty o znanych, z wysoką dokładnością, wysokościach w układach PL-ETRF2000-GRS80H oraz PL-EVRF2007-NH. Punkty te podzielono na 4 zbiory zgodnie z przynależnością do następujących sieci: ASG-EUPOS, EUVN oraz POLREF.

Ponieważ w wykazie współrzędnych punktów poziomej osnowy geodezyjnej odnaleziono tylko 11 punktów sieci EUVN z podanymi wysokościami w układzie PL-ETRF2000-GRS80h, przy czym część z tych punktów było również punktami innych sieci, dla zbioru EUVN wysokości elipsoidalne przyjęto ze sprawozdania technicznego pt.: „ZINTEGROWANIE PODSTAWOWEJ OSNOWY GEODEZYJNEJ NA OBSZARZE POLSKI ZE STACJAMI REFERENCYJNYMI SYSTEMU ASG-EUPOS ETAP IV Opracowanie i wyrównanie obserwacji GNSS”. Z tego powodu punkty te nie mogą brać udziału bezpośrednio w procesie budowy modelu i stanowią jedynie materiał porównawczy.

Punkty sieci ASG-EUPOS tworzą zespoły (stacja oraz dwa punkty ekscentryczne). Do obliczeń i analiz wybrano stacje z wykazanymi odpowiednimi wysokościami oraz punkty ekscentryczne (jeden punkt dla jednej stacji), które zostały dołączone do osnowy wysokościowej za pomocą geometrycznej niwelacji precyzyjnej. Z uwagi na sposób wyznaczania wysokości normalnych stacji (poprzez niwelację satelitarną w nawiązaniu do punktów ekscentrycznych) stacje oraz punkty ekscentryczne podzielono na dwa zbiory spodziewając się nieco innych dokładności wyznaczenia GNSS/niwelacyjnych anomalii

wysokości w obu zbiorach. Głównym celem przedstawionego podziału było przeprowadzenie analizy systematycznych zmian GNSS/niwelacyjnych anomalii wysokości w stosunku do modelu quasi-geoidy grawimetrycznej, zmierzające do wskazania zbioru punktów umożliwiających właściwe dopasowanie quasi-geoidy grawimetrycznej do punktów GNSS/niwelacyjnych.

Łącznie wybrano 528 punktów tworzących zbiory:

- ASG_Stacje – 94 punkty
- ASG_Ekscentry – 95 punktów
- POLREF – 297 punktów
- EUVN – 42 punkty

Opracowany, grawimetryczny model quasi-geoidy stanowi powierzchnię odniesienia niezależną od danych GNSS/niwelacyjnych. Może więc zostać wykorzystany do oceny jakości GNSS/niwelacyjnych anomalii wysokości ($\zeta_{GNSS/lev}$). Jest to istotny element analiz, ponieważ może wskazać punkty, dla których GNSS/niwelacyjne anomalie wysokości obarczone są błędami grubymi. Punkty takie należy pominąć zarówno w oszacowaniu dokładności modelu quasi-geoidy, jak i w samym procesie opracowania modelu końcowego, ponieważ ich wykorzystanie może prowadzić do lokalnych deformacji modelu końcowego. W celu przeprowadzenia analizy obliczono różnice:

$$\Delta\zeta = \zeta_{GNSS/lev} - \zeta_{Graw} \quad (I.1)$$

gdzie ζ_{Graw} jest anomalią wysokości obliczoną z grawimetrycznego modelu quasi-geoidy. Najważniejsze statystyki różnic dla poszczególnych zbiorów punktów zawiera tabela I.1. W tabeli podane są również wartości maksymalnego odchylenia wielkości $\Delta\zeta$ od wartości średniej ($\Delta\zeta_{\text{sr}}$):

$$v_{\Delta\zeta} = \Delta\zeta - \zeta_{\text{sr}} \quad (I.2)$$

Tabela I.1 Najważniejsze statystyki różnic $\Delta\zeta = \zeta_{GNSS/lev} - \zeta_{Graw}$. Wartość $R = \max(\Delta\zeta) - \min(\Delta\zeta)$ jest zakresem zmienności.

Oznaczenie sieci	$\min(\Delta\zeta)$	$\max(\Delta\zeta)$	R	$\Delta\zeta_{\text{sr}}$	$stdev(\Delta\zeta)$	$\max(v_{\Delta\zeta})$
	[cm]					
ASG_Stacje	-4.1	3.2	7.3	-0.3	1.40	3.9
ASG_Excentry	-3.4	2.5	5.9	-0.5	1.23	2.9
EUVN	-5.6	1.7	7.3	-1.1	1.66	4.5
POLREF	-21.7	6.5	28.3	-1.2	2.16	20.5
POLREF*	-5.4	2.3	7.7	-1.2	1.54	4.2

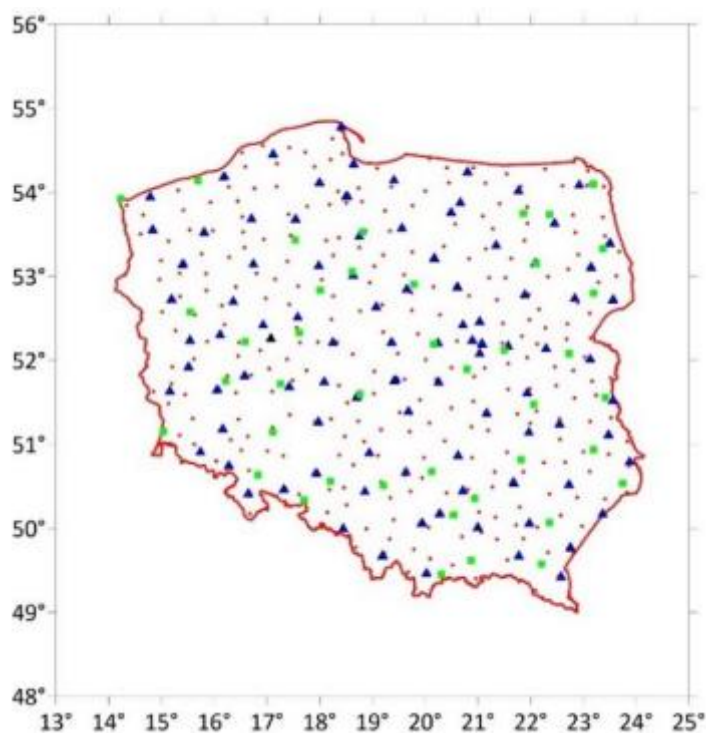
Analizę występowanie obserwacji odstających w poszczególnych zbiorach punktów przeprowadzono w oparciu o definicję błędu grubego. Przyjmując jako obserwację odstającą obserwację, której odchylenie od wartości średniej w danym zbiorze ($v_{\Delta\zeta}$) przekracza potrójną wartość odchylenia standardowego, stwierdzono, że w zbiorach ASG_Stacje, ASG_Excentry oraz EUVN obserwacje takie nie występują (w każdym zbiorze zachodzi zależność: $\max(|v_{\Delta\zeta}|) \leq 3stdev(\Delta\zeta)$). Natomiast w zbiorze POLREF występuje co najmniej jedna obserwacja odstająca (wykazane w tabeli odchylenie maksymalne prawie 10-krotnie przewyższa odchylenie standardowe). W związku z powyższym dla tego zbioru przeprowadzono iteracyjną procedurę identyfikacji i eliminacji obserwacji odstających. W każdej iteracji obliczono odchylenia wszystkich obserwacji od średniej oraz porównano je z 3-krotną wartością odchylenia standardowego. Obserwacja o największym odchyleniu $v_{\Delta\zeta}$, które przekraczało wartość $3stdev(\Delta\zeta)$ była usuwana ze zbioru. Operację powtarzano do momentu spełnienia warunku przez wszystkie obserwacje. W ten sposób zidentyfikowano obserwacje odstające i usunięto ze zbioru POLREF 8 wartości $\zeta_{GNSS/lev}$. Wykaz punktów odstających zawiera tabela I.2.

Tabela I.2 Wykaz punktów odstających zbioru POLREF.

Nr	φ	λ	h	H^N
1602	50.597846	20.355837	320.611	283.683
2103	51.740613	15.893792	107.435	67.819
1701	50.933236	21.969125	281.993	248.232
2705	51.621830	21.209061	189.209	155.929
4602	53.613185	20.034465	181.476	151.504
5502	54.222882	19.753072	79.853	51.082
0502	49.360951	19.953952	1053.131	1011.526
4204	53.651559	16.962005	201.536	169.379

Po wyeliminowaniu obserwacji odstających ze zbioru POLREF powstał zbiór złożony z 289 punktów oznaczany dalej jako POLREF*. Najważniejsze statystyki wartości $\Delta\zeta$ tego zbioru zawiera ostatni wiersz tabeli I.1.

Położenie punktów poszczególnych punktów prezentuje rysunek I.1.



Rysunek I.1 Położenie punktów GNSS/niwelacyjnych. Oznaczenia: POLREF - czerwone kropki; ASG_Stacje – granatowe trójkąty; ASG_Excentry – czarne trójkąty (widoczny tylko 1 punkt); EUVN – zielone kwadraty

Podstawowymi parametrami opisującymi zgodność opracowanego, grawimetrycznego modelu quasi-geoidy z modelem quasi-geoidy zdefiniowanym przez GNSS/niwelacyjne anomalie wysokości są:

1. odchylenie standardowe różnic obu powierzchni opisujące błędy o charakterze przypadkowym,
2. przesunięcie pionowe i pochylenie quasi-geoidy grawimetrycznej względem quasi-geoidy GNSS/niwelacyjnej opisujące błędy o charakterze systematycznym.

Częściowo wartości obu wskazanych parametrów zawiera tabela I.1.

W zakresie błędów systematycznych widzimy przesunięcie powierzchni quasi-geoidy grawimetrycznej względem powierzchni quasi-geoid GNSS/niwelacyjnych dla poszczególnych grup punktów o wartości od $-3mm$ do $-12mm$ (wartości $\Delta\zeta_{sr}$).

Względem zbiorów sieci ASG-EUPOS przesunięcie wynosi $-3mm$ (stacje) oraz $-5mm$ (punkty ekscentryczne). Przesunięcie względem punktów EUVN i POLREF* jest nieco większe i wynosi odpowiednio $-11mm$ oraz $-12mm$. O ile samo przesunięcie quasi-geoidy GNSS/niwelacyjnej względem quasi-geoidy grawimetrycznej było spodziewane i nie powinno wpłynąć na jakość modelu wynikowego, to różnice przesunięć dla poszczególnych zbiorów stwarzają już pewien problem. Zauważmy, że różnice w parach zbiorów ASG_Stacje i ASG_Excentry oraz EUVN i POLREF* są małe ($2 - 3mm$) i można je uznać za nieistotne. Natomiast różnice pomiędzy tymi parami wynoszą ok. $8mm$. Takie różnice nie mogą być zanedbane i stwarzają problem z wyborem zbioru punktów, które można wykorzystać do budowy ostatecznego modelu quasi-geoidy.

Wykazane w tabeli I.1 odchylenia standardowe różnic $\Delta\zeta$ wskazują na dokładność opracowanego modelu quasi-geoidy grawimetrycznej. Ponieważ wartości te zależą również od wartości $\zeta_{GNSS/lev}$, wskazują również na jakość wykorzystanych danych GNSS/niwelacyjnych. Jak widzimy, odchylenia standardowe różnic $\Delta\zeta$ są różne dla różnych zbiorów punktów. Najniższa wartość występuje dla punktów zbioru ASG_Excentry ($12mm$), a najwyższa dla punktów sieci EUVN ($17mm$). Sugeruje to najwyższą dokładność pomierzonych anomalii wysokości dla punktów sieci ASG-EUPOS. W celu kontroli pochylenia quasi-geoidy GNSS/niwelacyjnej względem quasi-geoidy grawimetrycznej przyjęto, że różnice $\Delta\zeta$ w poszczególnych zbiorach reprezentowane są za pomocą modelu liniowego o postaci:

$$\Delta\zeta = a_0 + a_1x + a_2y \quad (I.3)$$

gdzie x i y są współrzędnymi punktu w lokalnym prostokątnym układzie współrzędnych z osią X skierowaną na północ i osią Y skierowaną na wschód (układ wykorzystany w obliczeniach modelu GGI). Początek układu znajduje się w punkcie o współrzędnych $\varphi = 52^\circ$, $\lambda = 19^\circ$. Wartości a_0 , a_1 , a_2 są wyznaczanymi parametrami.

Parametry a_0 , a_1 , a_2 wyznaczono poprzez minimalizację sumy kwadratów odchyleń v :

$$v = a_0 + a_1x + a_2y - \Delta\zeta \quad (I.4)$$

Wyznaczone parametry pozwoliły na oszacowanie uśrednionego pochylenia obu powierzchni względem siebie. Wartości te prezentowane są w tabeli I.3.

Tabela I.3 Pochylenie powierzchni quasi-geoidy grawimetrycznej względem poszczególnych zbiorów danych GNSS/niwelacyjnych (zgodnie z modelem (I.3)).

Oznaczenie sieci	Parametr (a_0) [cm]	Pochylenie [$mm/500km$]	
		Wzdłuż osi X	Wzdłuż osi Y
ASG_Stacje	-0.1	-6.8	11.2
ASG_Excentry	0.0	-8.8	9.0
EUVN	-0.3	-18.8	25.7
POLREF*	-0.1	-8.2	17.6

Wszystkie analizowane zbiory wykazują pochylenie powierzchni quasi-geoidy GNSS/niwelacyjnej względem quasi-geoidy grawimetrycznej. Kierunki pochylenia są dla wszystkich zbiorów zgodne, natomiast różne są wartości tego pochylenia. Największe pochylenie, zarówno w kierunku południe-północ (wzdłuż osi X), jak i zachód-wschód (wzdłuż osi Y), wyznaczono dla zbioru EUVN (wartości 2- i 3-krotnie wyższe w porównaniu do zbiorów ASG_Stacje oraz ASG_Excentry). Dla zbioru POLREF pochylenie w kierunku południe-północ jest zgodne ze zbiorami ASG_Stacje oraz ASG_Excentry, w kierunku zachód-wschód jest nieco większe, jednak mniejsze od pochylenia wyznaczonego dla zbioru

EUVN. Wpływ wyznaczonego pochylenia widoczny jest również w wartościach odchyień v w porównaniu do odchyień $v_{\Delta\zeta}$, a jego usunięcie wyraźnie zmniejsza odchylenie standardowe różnic $\Delta\zeta$. Wartości te zawiera tabela I.4.

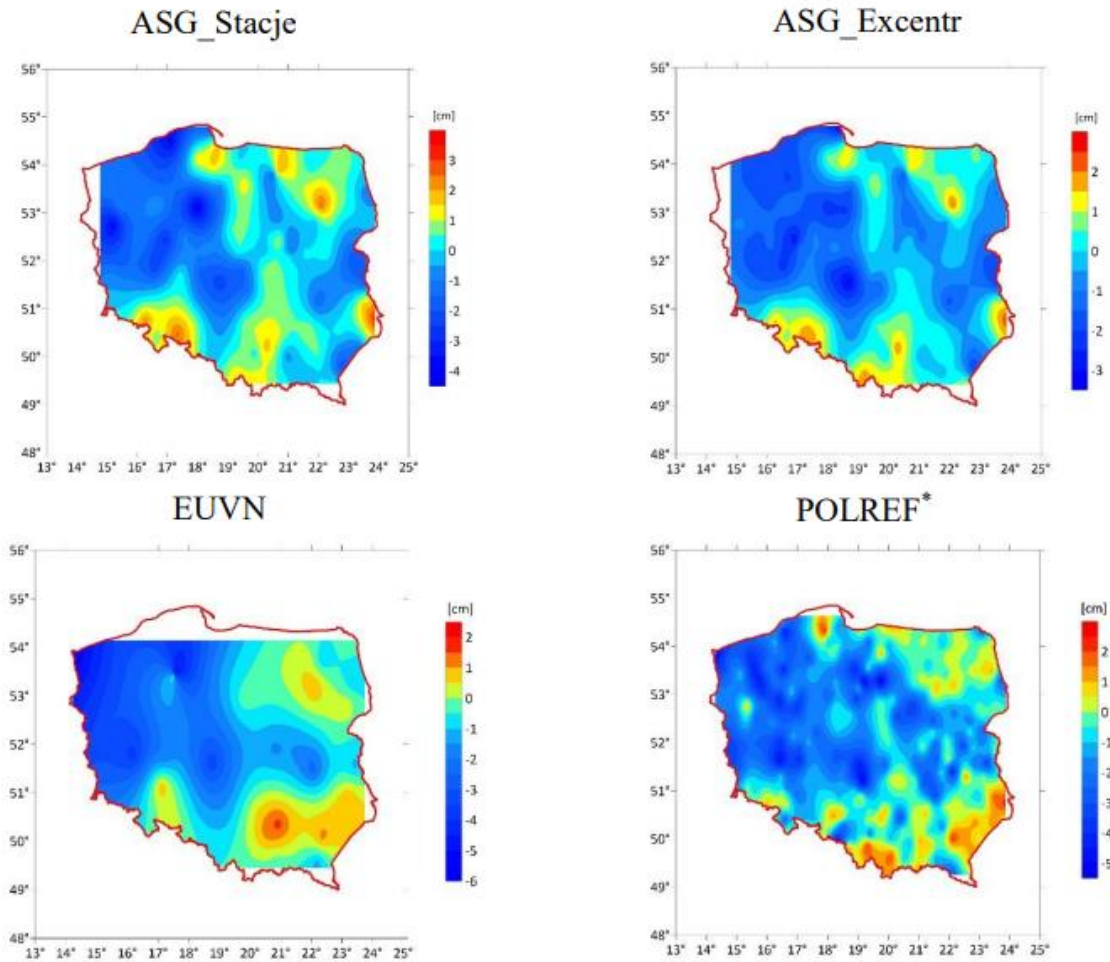
Tabela I.4 Najważniejsze charakterystyki odchyień v oraz odchylenia standardowe $\Delta\zeta$ przy uwzględnieniu modelu (I.3). Wartość $R = \max(v) - \min(v)$.

Oznaczenie sieci	$\min(v)$	$\max(v)$	R	$stdev(\Delta\zeta)$
	[cm]			
ASG_Stacje	-3.0	3.6	6.6	1.34
ASG_Excentry	-2.5	2.7	5.2	1.16
EUVN	-2.5	2.4	4.9	1.20
POLREF*	-4.2	4.1	8.3	1.37

Porównując odchylenia standardowe wykazane w tabelach I.1 i I.4 zauważyć można wielkość udziału błędów systematycznych w odchyleniu standardowym. Wpływ ten jest największy dla zbioru EUVN (ponad $4mm$) a najmniejszy dla zbiorów ASG_Stacje i ASG_Excentry (ok. $1mm$). Zaznaczmy, że błędy systematyczne różnic $\Delta\zeta$ mogą mieć nieco inną postać od przyjętego do analizy modelu (I.3). W celu wizualnej oceny tych błędów opracowano mapy różnic $\Delta\zeta$ danych równaniem (I.1). Mapy te dla poszczególnych zbiorów przedstawia rysunek I.2. Szczegółowość tych map wynika z liczebność poszczególnych zbiorów. Niemniej wyraźnie widać, że model różnic I.3 jest zbyt prosty. Wartości dodatnie różnic występują w części północno-wschodniej oraz południowej Polski. Natomiast wartości ujemne obejmują część północno zachodnią, środkową i środkowo-wschodnią. Wskazuje to na potrzebę dopasowania modelu quasi-geoidy grawimetrycznej do danych GNSS/niwelacyjnych za pomocą nieco innych funkcji niż prosty model I.3.

Przedstawione wyniki, porównania danych GNSS/niwelacyjnych z grawimetrycznym modelem quasi-geoidy można podsumować następująco:

1. Przyjmując jako miarę dokładności odchylenie standardowe dopasowania modelu grawimetrycznego do poszczególnych zbiorów punktów GNSS/niwelacyjnych można oszacować dokładności wyznaczonego modelu quasi-geoidy grawimetrycznej. To odchylenie standardowe jest różne dla poszczególnych zbiorów i w najlepszym przypadku osiąga wartość ok. 12 mm dla zbioru ASG_Excentry.
2. Ponieważ wartości odchyień standardowych różnic $\Delta\zeta$ zależą również od dokładności wyznaczenia wartości $\zeta_{GNSS/lev}$ wspomniane wartości odchyień standardowych świadczą również o dokładności GNSS/niwelacyjnych anomalii wysokości w poszczególnych zbiorach punktów. Powiedzieć więc można, że pod względem dokładności wyznaczenia wartości $\zeta_{GNSS/lev}$ poszczególne zbiory różnią się między sobą, a zbiorem o najwyższej dokładności jest zbiór ASG_Excentry. Jeżeli przyjmiemy, że błąd wyznaczenia wartości $\zeta_{GNSS/lev}$ w zbiorze ASG_Excentry jest na poziomie ok. $10mm$, to biorąc pod uwagę odchylenie standardowe różnic $\Delta\zeta$ dla tego zbioru (ok. $12mm$), błąd opracowanego modelu quasi-geoidy grawimetrycznej należy ocenić na poziomie poniżej $10mm$.



Rysunek I.2 Mapy różnic pomiędzy danymi GNSS/niwelacyjnymi dla poszczególnych zbiorów punktów a modelem quasi-geoidy grawimetrycznej.

3. Zbiory EUVN, POLREF oraz zbiory punktów sieci ASG-EUPOS obarczone są również różnymi wartościami błędów systematycznych w zakresie przesunięcia i pochylenia quasi-geoidy GNSS/niwelacyjnej względem quasi-geoidy grawimetrycznej. Dla zbiorów ASG_Excentry oraz ASG_Stacje błędy systematyczne są prawie takie same.
4. Wykazane błędy systematyczne wskazują, że proces dopasowania quasi-geoidy grawimetrycznej do danych GNSS/niwelacyjnych nie powinien być realizowany z wykorzystaniem wszystkich punktów. Różne wartości pochylenia oraz przesunięcia, którego zmiany dla poszczególnych zbiorów osiągają wartości 10 mm powodują, że proces ten powinien zostać zrealizowany po wyborze jednego ze zbiorów (zbiory ASG_Stacje i ASG_Excentry mogą być traktowane jako jeden zbiór).
5. Biorąc pod uwagę, że spośród analizowanych zbiorów największą dokładność pozycji względem elipsoidy mają punkty sieci ASG-EUPOS, a więc zbiory ASG_Stacje oraz ASG_Excentry. Stąd punkty tych zbiorów zostały wybrane do dopasowania quasi-geoidy grawimetrycznej do danych GNSS/niwelacyjnych.

I.2 Wybór funkcji transformującej model quasi-geoidy grawimetrycznej do danych GNSS/niwelacyjnych i opracowanie modelu quasi-geoidy dopasowanej

Transformacja modelu quasi-geoidy grawimetrycznej do danych GNSS/niwelacyjnych zostanie przeprowadzona poprzez:

- wyznaczenie zdefiniowanych równaniem (I.1) różnic $\Delta\zeta$ w punktach dopasowania;
- zbudowanie analitycznego modelu tych różnic $\Delta\zeta$;
- wyznaczenie na podstawie tego modelu różnic we wszystkich punktach siatki $0.01^\circ \times 0.01^\circ$;
- obliczenie modelu quasi-geoidy dopasowanej do punktów GNSS/niwelacyjnych:

$$\zeta_{GNSS/lev}^A = \zeta_{Graw} + \Delta\zeta \quad (I.5)$$

Przy wyborze analitycznego modelu różnic przyjęto założenie, że model ten powinien tłumić lokalne błędy danych GNSS/niwelacyjnych. Funkcja definiująca ten model powinna być więc funkcją o niskiej liczbie parametrów oraz niskiego stopnia. Wstępnie wyselekcjonowano następujące funkcje:

- $\Delta\zeta = a_0 + a_1x + a_2y$
- $\Delta\zeta = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2$
- $\Delta\zeta = a_0 + a_1x + a_2y + a_3y^2$
- $\Delta\zeta = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$
- $\Delta\zeta = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy$
- $\Delta\zeta = a_0 + a_1x + a_2y + a_3y^2 + a_4xy$
- $\Delta\zeta = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5xy$
- $\Delta\zeta = a_0 + a_1\cos\varphi\cos\lambda + a_2\cos\varphi\sin\lambda + a_3\sin\varphi + a_4\sin^2\varphi$

Dla poszczególnych grup punktów GNSS/niwelacyjnych zbudowano wskazane wyżej modele. Obliczono również odchylenia standardowe dla wartości $\Delta\zeta$ w poszczególnych modelach, które są prezentowane w tabeli I.5

Spśród analizowanych funkcji dla wszystkich zbiorów funkcje e) i g) wykazują najniższe wartości odchyień standardowych różnic $\Delta\zeta$. Funkcją o mniejszej liczbie parametrów jest funkcja e) i ta właśnie funkcja została wybrana do transformacji modelu quasi-geoidy grawimetrycznej do modelu dopasowanego. Ostatecznie więc zapiszemy:

$$\zeta_{GNSS/lev}^A = \zeta_{Graw} + a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy \quad (I.6)$$

Tabela I.5 Odchylenia standardowe $\Delta\zeta$ dla różnych modeli transformacji.

Oznaczenie zbioru punktów	ASG_Stacje	ASG_Excentry	EUVN	POLREF*
Model transformacji	[cm]			
a) $\Delta\zeta = a_0 + a_1x + a_2y$	1.34	1.16	1.20	1.37
b) $\Delta\zeta = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2$	1.32	1.11	1.21	1.29
c) $\Delta\zeta = a_0 + a_1x + a_2y + a_3y^2$	1.33	1.15	1.19	1.37
d) $\Delta\zeta = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$	1.29	1.14	1.13	1.36
e) $\Delta\zeta = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy$	1.23	1.05	1.12	1.27
f) $\Delta\zeta = a_0 + a_1x + a_2y + a_3y^2 + a_4xy$	1.29	1.04	1.14	1.37
g) $\Delta\zeta = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5xy$	1.24	1.05	1.13	1.27
h) $\Delta\zeta = a_0 + a_1\cos\varphi\cos\lambda + a_2\cos\varphi\sin\lambda + a_3\sin\varphi + a_4\sin^2\varphi$	1.32	1.11	1.20	1.29

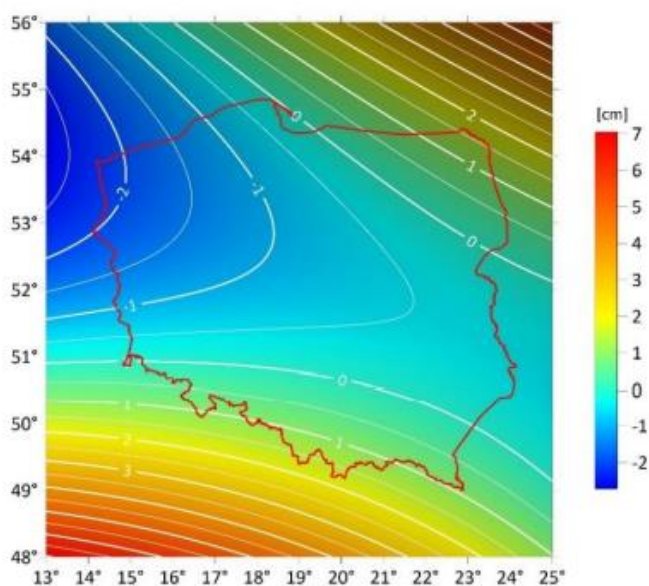
Współczynniki a_0, \dots, a_4 wyznaczone są metodą najmniejszych kwadratów na podstawie zbiorów ASG_Stacje i ASG_Excentry.

Wartości współczynników transformacji zawiera tabela I.6.

Tabela I.6 Wyznaczone współczynniki transformacji dla modelu e).

Oznaczenie współczynnika	Wartość współczynnika
a_0	-0.007653
a_1	$-29.339449 \cdot 10^{-9}$
a_2	$14.469747 \cdot 10^{-9}$
a_3	$195.901032 \cdot 10^{-15}$
a_4	$191.843232 \cdot 10^{-15}$

Dla całej siatki ($0.01^\circ \times 0.01^\circ$) wyznaczone zostały poprawki transformujące model grawimetryczny do danych GNSS/niwelacyjnych. Mapę poprawek przedstawia rysunek I.3.



Rysunek I.3 Mapa poprawek transformujących model quasi-geoidy grawimetrycznej do danych GNSS/niwelacyjnych.

Zauważmy, że model różnic przedstawiony na rysunku I.3 odpowiada różnicom widocznym na rysunku I.2.

Wyznaczony model porównano z anomaliami wysokości dla poszczególnych zbiorów punktów. Najważniejsze statystyki różnic $\Delta\zeta = \zeta_{GNSS/lev} - \zeta^{A_{GNSS/lev}}$ zawiera tabela I.7.

Tabela I.7 Najważniejsze statystyki różnic $\Delta\zeta = \zeta_{GNSS/lev} - \zeta^{A_{GNSS/lev}}$. Wartość $R = \max(\Delta\zeta) - \min(\Delta\zeta)$ jest zakresem zmienności.

Oznaczenie sieci	$\min(\Delta\zeta)$	$\max(\Delta\zeta)$	R	$\Delta\zeta_{sr}$	$stdev(\Delta\zeta)$
	[cm]				
ASG_Stacje	-3.0	3.7	6.7	0.1	1.21
ASG_Excentry	-3.4	2.9	6.3	-0.1	1.03
EUVN	-3.6	1.6	5.2	-0.8	1.27
POLREF*	-6.0	2.9	8.9	-0.8	1.32

I.3 Uzasadnienie wybranej metody opracowania quasi-geoidy

W ramach realizacji projektu dotyczącego budowy 1 cm modelu geoidy dla obszaru Polski (Kryński 2007) do modelowania wykorzystano 5 procedur obliczeniowych wykorzystujących różne techniki:

- niwelacji astronomiczno-geodezyjnej – model wyznaczony na podstawie składowych odchylenia pionu,
- modelu grawimetryczny – obliczony z wykorzystaniem techniki RCR oraz FFT,
- modelu satelitarno–niwelacyjny – opracowany z wykorzystaniem funkcji wielomianowych, funkcji minimalnej krzywizny oraz krygingu wzmocnionego danymi grawimetrycznymi, gdzie poprawki grawimetryczne wyznaczono z wykorzystaniem rozwiązania Stokesa,
- kompleksowy model quasi-geoidy – opracowany z wykorzystaniem rozwiązania Molodenskigo oraz kolokacji metodą najmniejszych kwadratów,
- modelu quasi-geoidy dopasowanej – który powstał poprzez dopasowanie modelu quasi-geoidy grawimetrycznej do sieci punktów POLREF z wykorzystaniem techniki kolokacji z estymacją trendu.

Do oceny dokładności tych rozwiązań założono i pomierzono trawers kontrolny z precyzyjnie wyznaczonymi GNSS/niwelacyjnymi anomaliami wysokości. Jako wskaźnik dokładności przyjęto odchylenie standardowe odchyłek pomierzonych anomalii wysokości od opracowanego modelu w punktach trawersu. Uzyskano dokładności od 13.3 cm dla niwelacji astronomiczno-geodezyjnej do 2.1 cm dla rozwiązań grawimetrycznego i kompleksowego (Kryński 2007).

Modele te były opracowane z wykorzystaniem mniej dokładnych globalnych modeli geopotencjału (głównie EGM96). W ostatnich latach kontynuowano prace z wykorzystaniem nowszych, dużo dokładniejszych globalnych modeli geopotencjału (głównie EGM2008). Zestawienie tych ostatnich podejść oraz ich dokładności prezentowane jest niżej. Jako wskaźnik dokładności przyjęto odchylenie standardowe odchyłek GNSS/niwelacyjnych anomalii wysokości od modelu quasi-geoidy.

- Model quasi-geoidy opracowany metodą LSC przy wykorzystaniu modelu EGM2008 oraz rozkładu ($N=N_{GM}+\delta N_{top}+\delta N_{\Delta g}$) (Łyszkowicz, 2010). Oszacowana przez autora dokładność modelu wyniosła 3.2 cm dla punktów POLREF oraz 1.8 cm dla punktów trawersu kontrolnego (Kryński, 2007).
- Model PL-geoid-2011 opracowany metodą interpolacyjną poprzez transformację (z poprawkami Hausbrandta) modelu EGM2008 w sieć punktów GNSS/niwelacyjnych (Kadaj 2013). Dokładność tego modelu oszacowana na podstawie punktów sieci EUVN i POLREF wyniosła odpowiednio 1.4 i 1.7 cm.
- Model quasi-geoidy opracowany metodą LSC z wykorzystaniem modelu EGM2008 (Szelachowska i Kryński, 2014). Uzyskane dokładności dla punktów POLREF wyniosły 2.2 cm. Dla punktów EUVN i ASG-EUPOS 1.8 cm. Najwyższe dokładności uzyskano dla punktów trawersu kontrolnego – 1.6 i 1.4 cm.
- Model quasi-geoidy opracowany metodą KTH (z modyfikacją funkcji Stokesa) z wykorzystaniem modelu EGM2008 (Kuczynska-Siehiem i in. 2015). Dokładności modelu oszacowano na podstawie stacji ASG-EUPOS uzyskując odchylenia standardowe na poziomie od 3.1 cm (dla oryginalnych wyników) do 2.2 cm po dopasowaniu modelu do punktów GNSS/niwelacyjnych za pomocą transformacji 7 parametrowej.

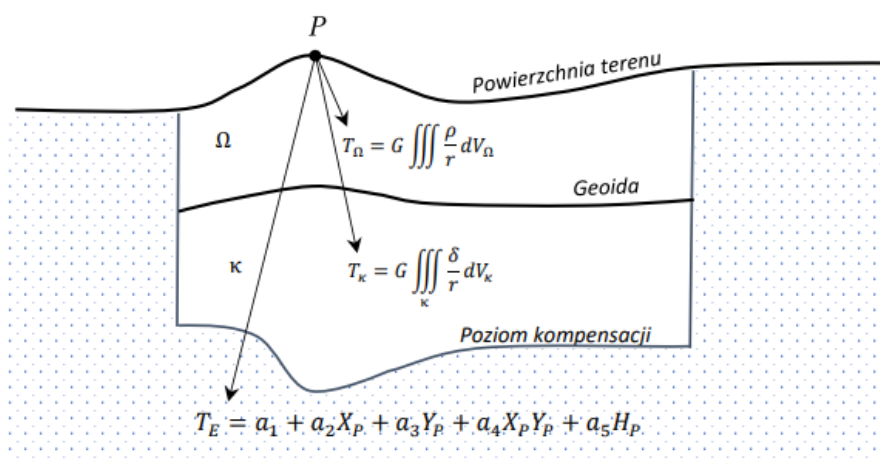
Porównując wskazane wyżej grupy modeli zauważymy, że zastosowanie wyższej jakości modelu globalnego poprawiło jakość modeli końcowych. Nie jest to jednak zmiana bardzo duża. Podkreślić również należy, że dotychczas budowane modele quasi-geoidy grawimetrycznej dla obszaru Polski wyznaczane były z wykorzystaniem dużo szerszego zakresu danych grawimetrycznych (wykraczające

kilkaset kilometrów poza granice Polski) w stosunku do danych udostępnionych do niniejszego opracowania. Były również wyznaczane za pomocą klasycznych metod w różnych kombinacjach i procedurach. W związku z tym jeżeli oczekiwalibyśmy zmiany jakości nowo opracowanego modelu quasi-geoidy grawimetrycznej, to należałoby się zwrócić w stronę innych jak klasyczne techniki modelowania. Takimi technikami są metoda radialnych funkcji sferycznych oraz metoda GGI. Z uwagi na dobrą znajomość metody GGI, do modelowania quasi-geoidy wybrano właśnie to rozwiązanie.

I.4 Opis metody GGI

Istotą metody GGI jest znalezienie takich funkcji rozkładu gęstości mas zakłócających leżących pod powierzchnią geoidy oraz mas topograficznych, aby generowany przez te masy potencjał zakłócający oraz zakłócenia grawimetryczne w punktach na powierzchni terenu odpowiadały wartościom rzeczywistym. Ponieważ wyznaczenie rozkładu gęstości różnych warstw skorupy ziemskiej jest głównym zadaniem geofizycznej inwersji danych grawimetrycznych, szczegółowe rozwiązanie opiera się na technikach geofizycznych stąd też nazwa metody (Geophysical Gravity Inversion).

Ogólnie rozwiązanie GGI opiera się na budowie lokalnego modelu potencjału zakłócającego T w przestrzeni zewnętrznej. Potencjał zakłócający zdefiniowany jest w postaci trzech składowych. Pierwszą składową oznaczoną jako T_Ω stanowi potencjał generowany przez masy topograficzne położone w objętości Ω .



Rysunek I.4 Składowe modelu GGI.

Druga składowa (T_κ) generowana jest przez masy zakłócające zalegające w objętości κ pomiędzy powierzchnią geoidy a powierzchnią nieciągłości Mohorovičića. Wspomniane objętości Ω i κ są ograniczone i w zasięgu horyzontalnym wychodzą nieco poza obszar pokryty przez wykorzystane do modelowania dane pomiarowe. Ponieważ dane pomiarowe zawierają również wpływ mas położonych na zewnątrz objętości Ω i κ , wprowadzony został potencjał T_E . Składowa ta reprezentuje wpływ mas topograficznych i mas zakłócających leżących poza objętościami Ω i κ . Potencjał T_E opisuje również systematyczne i długofalowe błędy danych wejściowych. Ostatecznie w punkcie P położonym na powierzchni terenu, potencjał zakłócający zapiszemy w postaci:

$$T_P = T_r + T_\Omega + T_\kappa \quad (I.7)$$

Składowe T_Ω i T_κ można obliczyć wykorzystując wzory całkowe Newtona:

$$T_\Omega = G \iiint_{\Omega} \frac{\rho}{l} dV_\Omega \quad (I.8)$$

$$T_{\kappa} = G \iiint_{\kappa} \frac{\delta}{l} dV_{\kappa} \quad (I.9)$$

gdzie G jest stałą grawitacji, ρ i δ są funkcjami rozkładu gęstości w objętościach Ω i κ , dV_{Ω} i dV_{κ} są różniczkowymi przyrostami objętości, a l jest odległością pomiędzy masą przyciągającą a punktem P .

Składowa TE opisuje zmiany o charakterze trendu i jest reprezentowana przez wielomiany harmoniczne niskiego stopnia o postaci:

$$T_E = F(X_P, Y_P, H_P) = a_1 + a_2 X_P + a_3 Y_P + a_4 X_P Y_P + a_5 H_P \quad (I.10)$$

gdzie X_P , Y_P są współrzędnymi lokalnymi punktu P a H_P jest jego wysokością normalną. Zdefiniowany równaniem $\Delta\zeta = \zeta_{GNSS/lev} - \zeta_{GGM}$ model potencjału zakłócającego pozwala na sformułowanie następującego zadania: *znaleźć takie funkcje rozkładu gęstości ρ i δ oraz współczynniki wielomianów a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 aby spełnione było równanie (I.7) dla danych pomiarowych.*

Przedstawione wyżej zadanie jest rozwiązywane poprzez dyskretyzację funkcji ρ i δ . Objętości Ω i κ są dzielone na bloki, którym przypisuje się stałą gęstość. Objętość Ω jest zdefiniowana przez regularną siatkę numerycznego modelu terenu (NMT), naturalnym wydaje się wykorzystanie takiego podziału do wyznaczania gęstości. Ponieważ jednak określenie gęstości każdego bloku NMT wymaga wyznaczenia ogromnej liczby niewidomych, bloki te są łączone w strefy stałych, poszukiwanych gęstości. Objętość κ definiowana jest jako płyta, której grubość jest w przybliżeniu równa głębokości poziomu kompensacji i składa się z jednej lub kilku warstw bloków o stałej gęstości.

Obliczenia prowadzone są w lokalnym, kartezjańskim układzie współrzędnych, w którym znane są rozwiązania całek (I.8, I.9). Oś Z tego układu skierowana jest na geodezyjny zenit w punkcie początkowym układu. Oś X i Y leżą w płaszczyźnie horyzontu i są skierowane odpowiednio na północ i wschód. Punkt początkowy układu znajduje się blisko środka obszaru opracowania.

Nieznane parametry modelu (współczynniki wielomianów a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 oraz dyskretne funkcje gęstości ρ i δ) są wyznaczane metodą najmniejszych kwadratów na podstawie danych wejściowych w postaci GNSS/niwelacyjnych anomalii wysokości (zamienianych na wartości potencjału zakłócającego w punktach pomiarowych) oraz danych grawimetrycznych w postaci anomalii grawimetrycznych lub zakłóceń grawimetrycznych w punktach na powierzchni terenu. Oznaczając wektor wyznaczanych parametrów jako \mathbf{dx} równania obserwacyjne dla wartości potencjału zakłócającego (T) oraz zakłóceń grawimetrycznych (δg) będą następujące:

$$\begin{aligned} T + v_T &= \mathbf{f}^T \mathbf{dx} + T_0 \\ \delta g + v_{\delta g} &= -\mathbf{f}_z^T \mathbf{dx} + \delta g_0 \end{aligned} \quad (I.11)$$

gdzie \mathbf{f} i \mathbf{f}_z są znanymi wektorami parametrów, budowanymi na podstawie obserwacji. Wartości przybliżone obserwacji:

$$\begin{aligned} T_0 &= \mathbf{f}^T \mathbf{x}_0 \\ \delta g_0 &= -\mathbf{f}_z^T \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (I.12)$$

są wyznaczane na podstawie wektora przybliżonych rozkładów gęstości ρ i δ .

Dla zbiorów obserwacji na podstawie równań (I.12) budowany jest układ równań obserwacyjnych w postaci:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{dx} - \mathbf{L} \quad (I.13)$$

gdzie $\mathbf{v}^T = [v_T \dots, v_{\delta g} \dots]$ jest wektorem poprawek do obserwacji, \mathbf{A} jest znaną macierzą planu obserwacji oraz $\mathbf{L}^T = [T - T_0, \dots, \delta g - \delta g_0, \dots]$ jest wektorem wyrazów wolnych.

Układ (I.13) rozwiązywany jest metodą najmniejszych kwadratów.

Obliczenia z wykorzystaniem globalnego modelu geopotencjału prowadzone są przy wykorzystaniu procedury RCR. W przypadku wykorzystania danych GNSS/niwelacyjnych i grawimetrycznych procedura obliczeniowa przebiega następująco:

1. Usunięcie z danych wyjściowych składowej globalnej.

$$\delta T_r = T - T_{GM} = W - W_{GM} \quad (I.14)$$

$$\delta g_r = g - g_{GM}$$

gdzie W jest potencjałem przyspieszenia siły ciężkości, T_{GM} i W_{GM} są obliczone z globalnego modelu geopotencjału.

2. Na podstawie wartości rezydualnych budowany jest rezydualny model potencjału zakłócającego δT_r , za pomocą metody GGI.

$$\delta T_{rGGI} = \delta T_E + \delta T_\Omega + \delta T_\kappa \quad (I.15)$$

gdzie składowe δT_E , δT_Ω i δT_κ są rezydualnymi częściami składowych T_E , T_Ω , i T_κ po usunięciu z nich części zawartych w modelu globalnym.

3. Dla punktów nowych wyznaczany jest rezydualny potencjał zakłócający z modelu GGI oraz wartości potencjału grawitacyjnego z modelu globalnego. W konsekwencji wyznaczane są wartości potencjału grawitacyjnego z metody GGI (W_{GGI}):

$$W_{GGI} = W_{GM} + \delta T_{rGGI} \quad (I.16)$$

oraz anomalie wysokości (ζ_{GGI}):

$$\zeta_{GGI} = \frac{W_{GGI} - U}{\gamma_Q} = \frac{T_{GM} + \delta T_{rGGI}}{\gamma_Q} = \frac{T_{GGI}}{\gamma_Q} \quad (I.17)$$

gdzie U jest potencjałem normalnym w punkcie wyznaczanym natomiast γ_Q jest normalnym przyspieszeniem siły ciężkości na telluroidzie.

W tym wypadku równania obserwacyjne budowane są dla wartości rezydualnych i mają postać:

$$\delta T_r + v_T = \mathbf{f}^T \mathbf{dx} + T_0 \quad (I.18)$$

$$\delta g_r + v_{\delta g} = -\mathbf{f}_z^T \mathbf{dx} + \delta g_0$$

Tak opracowany model quasi-geoidy jest modelem dopasowanym do GNSS/niwelacyjnych anomalii wysokości i nie jest modelem quasi-geoidy grawimetrycznej.

W przypadku opracowania modelu grawimetrycznego (tylko z wykorzystaniem danych grawimetrycznych i globalnego modelu geopotencjału), w algorytmie obliczeniowym GNSS/niwelacyjne anomalie wysokości zastępowane są anomaliami wysokości wyznaczanymi z globalnego modelu geopotencjału. Ponieważ potencjał zakłócający z modelu globalnego można wyznaczyć w dowolnym punkcie, do obliczeń przyjmuje się regularną siatkę punktów wychodzącą poza obszar opracowania. Punkty tej siatki przyjmujemy jako punkty o znanych anomaliiach wysokości z modelu globalnego. W konsekwencji otrzymujemy model quasi-geoidy, która jest dopasowana do przyjętego do obliczeń globalnego modelu geopotencjału. Ponieważ zakładamy równość $W = W_{GM}$, więc równania obserwacyjne przyjmą postać:

$$v_T = \mathbf{f}^T \mathbf{dx} + T_0 \quad (I.18)$$

$$\delta g_r + v_{\delta g} = -\mathbf{f}_z^T \mathbf{dx} + \delta g_0$$

Zauważmy, że do budowy równań obserwacyjnych dla potencjału zakłócającego nie musimy obliczać jego wartości. Wystarczające jest określenie położenia wybranych punktów.

Dla modelu grawimetrycznego obliczone wartości należy poprawić o wartość $\zeta_0 = -\frac{\Delta W_0}{\gamma_Q}$ wynikającą z różnicy $\Delta W_0 = W_0 - U_0$ wartości potencjału rzeczywistego na geoidzie W_0 i potencjału normalnego na elipsoidzie GRS80. W niniejszych obliczeniach przyjęto wartość $U_0 = 62636860.850 \text{ m}^2/\text{s}^2$ (zgodnie z Moritz (1980)). Natomiast przyjęta wartość potencjału rzeczywistego na geoidzie wynosi $W_0 = 62636857.28 \text{ m}^2/\text{s}^2$ i została przyjęta za Ihde i in. (2006). Wartość ta jest wyższa od wartości zdefiniowanej w IERS Conventions (2010) o $1.28 \text{ m}^2/\text{s}^2$ oraz niższa od wartości przyjętej do wyznaczenia modelu EGG2015 (Denker, 2015) o $0.58 \text{ m}^2/\text{s}^2$.

$$\zeta_{Graw} = \zeta_{GGI} + \zeta_0 = \zeta_{GGI} - \frac{\Delta W_0}{\gamma_Q} \quad (I.19)$$

W związku z dwoma możliwymi rozwiązaniami GGI, w ramach prac nad obliczeniem modelu quasi-geoidy dla obszaru Polski przeprowadzono dwie procedury obliczeniowe zmierzające do opracowania modelu quasi-geoidy dopasowanej do danych GNSS/niwelacyjnych:

Procedura A obejmowała:

- opracowanie modelu quasi-geoidy grawimetrycznej,
- analizę jakości udostępnionych danych GNSS/niwelacyjnych oraz ocena dokładności modelu quasi-geoidy grawimetrycznej,
- wybór zbioru punktów przyjętych do dopasowania modelu grawimetrycznego do danych GNSS/niwelacyjnych oraz wybór funkcji transformującej model grawimetryczny do danych GNSS/niwelacyjnych,
- obliczenie modelu quasi-geoidy dopasowanej do danych GNSS/niwelacyjnych i ocena jego dokładności.

Procedura B obejmowała:

- wybór zbioru punktów GNSS/niwelacyjnych wykorzystanych w obliczeniach,
- budowę modelu dopasowanego do danych GNSS/niwelacyjnych i ocena jego dokładności.

I.5 Opracowanie modelu quasi-geoidy dopasowanej $\zeta_{GNSS/lev}^B$ zgodnie z opisaną procedurą

Ponieważ w wyniku tych obliczeń uzyskujemy model dopasowany do danych GNSS/niwelacyjnych, ważnym elementem prac jest wybór wiarygodnego zbioru punktów GNSS/niwelacyjnych. W punkcie I.1, na podstawie modelu quasi-geoidy grawimetrycznej dokonano analizy jakości dostępnych zbiorów tych punktów, uzyskując skontrolowane zbiory danych GNSS/niwelacyjnych. Z uwagi na to, że do budowy modelu quasi-geoidy dopasowanej zgodnie z procedurą B należy wykorzystać jak najwięcej punktów GNSS/niwelacyjnych postanowiono, że do budowy modelu zostaną wykorzystane punkty ze zbioru POLREF, natomiast punkty pozostałych zbiorów posłużą do oceny jakości zbudowanego modelu.

Do obliczeń wykorzystano:

- globalny model geopotencjału SGG-UGM-2,

- zbiory danych grawimetrycznych oraz numeryczne modele terenu takie same jak wykorzystane do obliczenia grawimetrycznego modelu quasi-geoidy,
- 289 punktów zbioru POLREF* (rys. I.1).

Podobnie jak poprzednio wyznaczony model porównano z anomaliami wysokości dla poszczególnych zbiorów punktów. Najważniejsze statystyki różnic $\Delta\zeta = \zeta_{GNSS/lev} - \zeta^B_{GNSS/lev}$ zawiera tabela I.8.

Tabela I.8 Najważniejsze statystyki różnic $\Delta\zeta = \zeta_{GNSS/lev} - \zeta^B_{GNSS/lev}$. Wartość $R = \max(\Delta\zeta) - \min(\Delta\zeta)$ jest zakresem zmienności.

Oznaczenie sieci	$\min(\Delta\zeta)$	$\max(\Delta\zeta)$	R	$\Delta\zeta_{\text{śr}}$	$stdev(\Delta\zeta)$
	[cm]				
ASG_Stacje	-2.3	3.7	6.0	1.0	1.18
ASG_Excentry	-2.2	3.1	5.3	0.7	0.96
EUVN	-2.4	2.5	4.9	0.2	1.11
POLREF*	-4.0	2.6	6.6	0.0	1.08

I.6 Opracowanie końcowego modelu quasi-geoidy dopasowanej (ζ_{GGI}).

Porównując zawarte w tabeli I.8 wartości z wykazanymi w tabeli I.7 analogicznymi statystykami dla wartości $\zeta^A_{GNSS/lev}$, zauważymy nieznaczną przewagę rozwiązania B. Ponieważ w rozwiązaniu tym wykorzystano punkty zbioru POLREF*, więc bardzo dobre dopasowanie modelu do punktów tego zbioru było spodziewane. Pozostałe zbiory punktów GNSS/niwelacyjnych nie były jednak w tych obliczeniach wykorzystywane. Mimo to, zarówno odchylenia standardowe, jak i ekstremalne wartości różnic $\Delta\zeta$ są zauważalnie niższe. Ponadto widoczne jest również przesunięcie zbiorów POLREF* i EUVN względem zbiorów ASG_Stacje i ASG_Excentry o 7 – 10 mm (podobnie jak we wszystkich przeprowadzonych analizach).

Korzystniejsze dla modelu B charakterystyki dokładnościowe prawdopodobnie spowodowane są tym, że model B obejmuje lokalne zmiany pomiędzy danymi GNSS/niwelacyjnymi i grawimetrycznym modelem quasi-geoidy, które są podobne dla wszystkich zbiorów (rysunek I.2). Takie lokalne zmiany nie mogą być ujęte w modelu A ze względu na przyjęty sposób transformacji modelu grawimetrycznego do punktów GNSS/niwelacyjnych. Ponieważ docelowy model quasi-geoidy, ze względu na jego wykorzystanie w pomiarach GNSS, powinien jak najlepiej pasować do danych GNSS/niwelacyjnych, postanowiono, że ostateczny model zostanie zbudowany na bazie obu opracowanych modeli. Ostateczne anomalie wysokości (oznaczone jako ζ_{GGI}) w punktach na terytorium Polski przyjęto więc jako wartości średnie z modeli A i B zgodnie z równaniem:

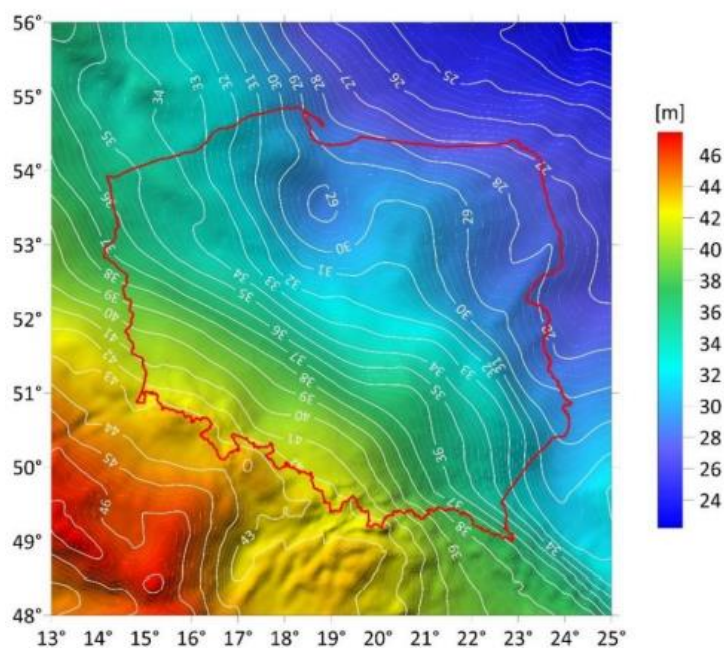
$$\zeta_{GGI} = (\zeta^A_{GNSS/lev} + (\zeta^B_{GNSS/lev} - 0.0085m))/2 \quad (I.20)$$

Wartość ta uwzględnia średnie przesunięcie (0.0085m) wykazane w tabeli I.8.

Poza granicami Polski ostateczne anomalie wysokości przyjęto z modelu A:

$$\zeta_{GGI} = \zeta^A_{GNSS/lev} \quad (I.21)$$

Mapa anomalii wysokości ζ_{GGI} prezentowana jest na rysunku I.5.



Rysunek I.5 Model quasi-geoidy dopasowanej opracowany metodą GGI (ζ_{GGI}).

Najważniejsze statystyki opracowanego modelu dopasowanego prezentowane są w tabeli I.9

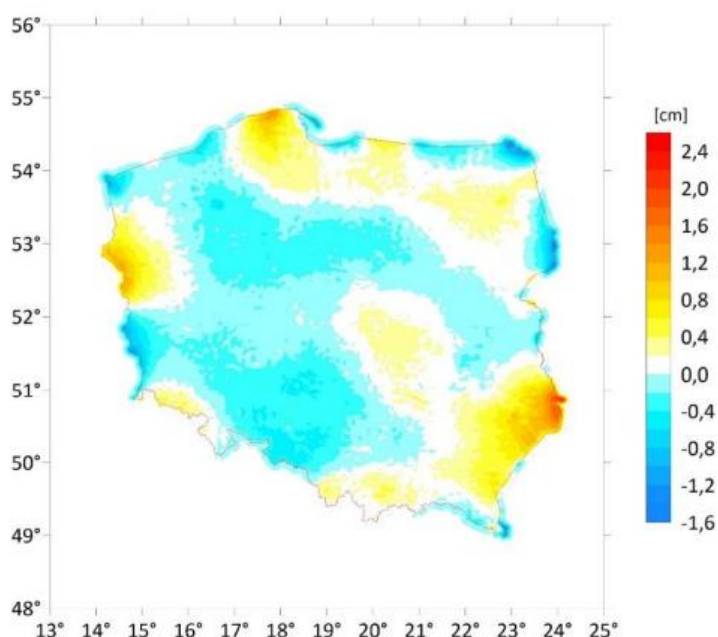
Tabela I.9 Najważniejsze statystyki wartości ζ_{GGI} .

$\min(\zeta_{GGI})$	$\max(\zeta_{GGI})$	R	$\zeta_{GGI\text{sr}}$	$\text{stdev}(\zeta_{GGI})$
[m]				
22.212	47.466	25.254	34.834	6.430

Różnice $\Delta\zeta_{GGI} = \zeta_{GNSS/lev}^A - \zeta_{GGI}$ określają wpływ modelu typu B na wartość ostatecznego modelu. Mapę tych różnic prezentuje rysunek I.6. Najważniejsze statystyki różnic $\Delta\zeta_{GGI} = \zeta_{GNSS/lev}^A - \zeta_{GGI}$ zawiera tabela I.10.

Tabela I.10 Najważniejsze statystyki wartości $\Delta\zeta_{GGI}$.

$\min(\zeta_{GGI})$	$\max(\zeta_{GGI})$	R	$\zeta_{GGI\text{sr}}$	$\text{stdev}(\zeta_{GGI})$
[cm]				
-1.5	2.4	3.9	0.0	0.2



Rysunek I.6 Mapa różnic $\Delta\zeta_{GGI} = \zeta^{A_{GNSS/lev}} - \zeta_{GGI}$

II Analiza dokładności opracowanego modelu.

II.1 Porównanie modelu z danymi GNSS/niwelacyjnymi.

Wyznaczony model porównano z anomaliami wysokości dla poszczególnych zbiorów punktów. Najważniejsze statystyki różnic $\Delta\zeta = \zeta_{GNSS/lev} - \zeta_{GGI}$ zawiera tabela II.1.

Tabela II.1 Najważniejsze statystyki różnic $\Delta\zeta = \zeta_{GNSS/lev} - \zeta_{GGI}$. Wartość $R = \max(\Delta\zeta) - \min(\Delta\zeta)$ jest zakresem zmienności.

Oznaczenie sieci	$\min(\Delta\zeta)$	$\max(\Delta\zeta)$	R	$\Delta\zeta_{sr}$	$stdev(\Delta\zeta)$
	[cm]				
ASG_Stacje	-3.0	2.5	5.5	0.1	1.16
ASG_Excentry	3.3	1.9	5.2	-0.1	0.95
EUVN	-3.4	1.6	5.0	-0.7	1.16
POLREF*	-5.6	2.3	7.9	-0.8	1.17

Spośród wykazanych w tabeli II.1 zbiorów tylko zbiór EUVN nie brał na żadnym etapie prac bezpośredniego udziału w opracowaniu modelu końcowego. Należy wziąć jednak pod uwagę, że zbiory ASG_Stacje oraz ASG_Excentry posłużyły do wyznaczenia podanych w równaniu (I.6) parametrów transformacji modelu quasi-geoidy gravimetrycznej do danych GNSS/niwelacyjnych. Transformacja ta nie uwzględniała zmian lokalnych, lecz o charakterze trendu. Stąd wskaźniki dokładnościowe dla tych zbiorów również mogą być brane pod uwagę przy ogólnej ocenie modelu.

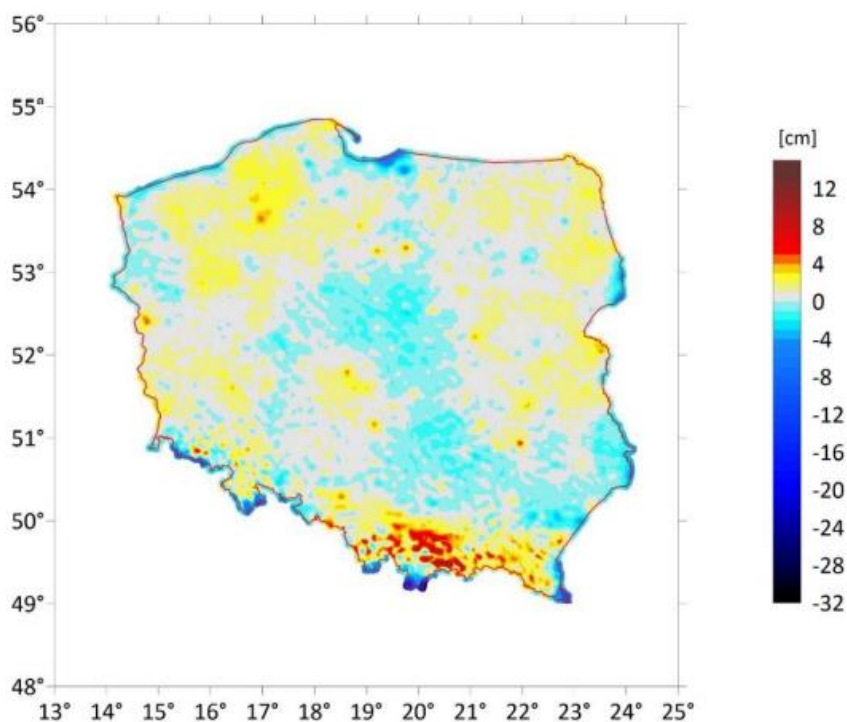
II.2 Porównanie modelu GGI z modelem PL-geoid11-EVRF2007.

Model quasi-geoidy GGI porównano również z modelem PL-geoid11-EVRF2007. Najważniejsze statystyki różnic $\Delta\zeta = \zeta_{GGI} - \zeta_{PL-geoid11-EVRF2007}$ prezentowane są w tabeli II.2.

Tabela II.2 Najważniejsze statystyki różnic $\Delta\zeta = \zeta_{GGI} - \zeta_{PL-geoid11-EVRF2007}$. Wartość $R = \max(\Delta\zeta) - \min(\Delta\zeta)$ jest zakresem zmienności.

$\min(\Delta\zeta)$	$\max(\Delta\zeta)$	R	$\Delta\zeta_{sr}$	$stdev(\Delta\zeta)$
[cm]				
-32.0	13.0	45.0	0.5	1.47

Przestrzenny rozkład różnic prezentowany jest na rysunku II.2



Rysunek II.1 Mapa różnic $\Delta\zeta = \zeta_{GGI} - \zeta_{PL-geoid11-EVRF2007}$

Zaprezentowane różnice pokazują lokalnie występujące znaczące różnice obu modeli. Ekstremalne wartości sięgające -32 cm dotyczą terenów przygranicznych, lub leżących na granicy Polski. Przyczyną takich dużych różnic mogą być efekty brzegowe obu modeli. W oddaleniu od granic różnice pomiędzy modelami są mniejsze i na przeważającej części Polski wahają się na poziomie $\pm 3\text{ cm}$. Na południu Polski, w okolicach Beskidów, rosną do ponad 10 cm . W tym rejonie ewentualna zmiana modelu powinna przynieść najlepsze efekty.

III Uwagi końcowe.

Jak zostało to opisane w punkcie I.1, do przeprowadzonych testów wysokości punktów EUVN w układzie PL-ETRF2000-GRS80h nie zostały przyjęte z wykazu współrzędnych punktów osnowy poziomej, ale ze sprawozdania technicznego. W związku z tym, punkty te nie mogły być wykorzystane do dopasowania modelu quasi-geoidy do danych GNSS/niwelacyjnych. Dla 5 punktów EUVN (PL01, PL02, PL03, PL05 i PL06), dla których w wykazie osnowy poziomej takie wysokości odnaleziono, wyznaczono odchyłki GNSS/niwelacyjnych anomalii wysokości od opracowanego modelu quasi-geoidy $\Delta\zeta = \zeta_{EUVN} - \zeta_{GGI}$. Podstawowe statystyki tych odchyłek zawiera poniższa tabela:

Tabela III.1 Najważniejsze statystyki różnic $\Delta\zeta = \zeta_{EUVN} - \zeta_{GGI}$. Wartość $R = \max(\Delta\zeta) - \min(\Delta\zeta)$ jest zakresem zmienności.

$\min(\Delta\zeta)$	$\max(\Delta\zeta)$	R	$\Delta\zeta_{\text{sr}}$	$\text{stdev}(\Delta\zeta)$
[cm]				
-2.9	-1.4	1.5	-2.1	0.53

Z tabeli III.1 wynika, że średnie przesunięcie wartości ζ_{EUVN} względem opracowanego modelu wynosi -2.1 cm . Jest to wartość bardzo duża. Dodajmy, że dla tych samych punktów, dla wysokości elipsoidalnych wykorzystanych w obliczeniach testowych, wartość ta wynosiła -1.8 cm . Ponieważ

uważamy, że na podstawie tak małego zbioru nie można dokonać tak dużego przesunięcia modelu, ignorując pozostałe zbiory danych, jako średni poziom quasi-geoidy został przyjęty średni poziom anomalii wysokości dla punktów sieci ASG_EUPOS. Wskazuje to jednak na problem z doбором takiego średniego poziomu modelu quasi-geoidy.